Prime graphs and subgroup lattices of finite groups (Research on finite groups and their representations, vertex operator algebras, and algebraic combinatorics)

AUTHOR(S):

飯寄, 信保; 澤辺, 正人

CITATION:

飯寄, 信保 ...[et al]. Prime graphs and subgroup lattices of finite groups (Research on finite groups and their representations, vertex operator algebras, and algebraic combinatorics). 数理解析研究所講究録 2014, 1872: 165-168

ISSUE DATE:

2014-01

URL:

http://hdl.handle.net/2433/195481

数理解析研究所講究録
第1872巻 2014年 165-168

Prime graphs and subgroup lattices of finite groups

飯寄信保 (Nobuo Iiyori, 山口大学教育),
澤辺正人 (Masato Sawabe, 千葉大学教育)

平成25年4月10日

以下、Gを有限群とする。群の構造を調べる上で部分群束の構造を調べることは非常に重要である。議論において、直接、部分群束があらわれない場合でも本質的には部分群束（またその部分束）の構造について考察していることが少なくない。この小文において、部分群束を考察する上で今後重要になるのではないかと思われる代数系について紹介したいと思っている。

1 クイバーとそのパス代数

2つの集合Q_0, Q_1(但し、$Q_0 \neq \emptyset$) 及び、2つのQ_1からQ_0への写像s, rからなる4つ組(Q_0, Q_1, s, r)をクイバーという。Q_0の要素を頂点（点）、Q_1の要素を矢と呼ぶ。矢xについて、$s(x), r(x)$をそれぞれxの始点、終点と呼ぶ。始点、終点がそれぞれa, bであるような矢を$a \xrightarrow{x} b$又は単に$x = (a \to b)$で表すこともある。

クイバー$Q = (Q_0, Q_1, s, r)$の矢の列$(x_1, x_2, \ldots, x_l)$が$r(x_i) = s(x_{i+1})$ $(i = 1, 2, \ldots, l-1)$を長さlの道という。$a_i = r(x_i) = s(x_{i+1})$ $(i = 1, 2, \ldots, l-1)$かつ$a_0 = s(x_1)$であるような道をしばしば

$$\left(a_0 \xrightarrow{x_1} a_1 \xrightarrow{x_2} a_2 \to \cdots \to a_{l-1} \xrightarrow{x_l} a_l\right)$$

であらす。話の流れでx_iがわかる場合は、x_i等の記載を省くこともある。この小文において道は大文字のギリシャ文字を用いて表すものとする。$\Delta = \left(a_0 \to a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_{l-1} \to a_l\right)$のとき、$a_0$, a_lをそれぞれそれぞれΔの始点、終点と呼ぶび、$s(\Delta)$, $r(\Delta)$で表す（記号の乱用ではあるが）。便宜上Q_0の要素を道と考え、それを自明な道と呼ぶ。$a \in Q_0$を自明な道として扱っていることを明示したいときe_aと表すことにし、また、$a = s(e_a) = r(e_a)$と考える。$\mathsf{P}(Q)$でクイバーQのパス全体を表すものとする。

クイバー Q について形式的に $\mathsf{P}(Q)$ を基とする $\mathbb{Z}$-自由加群 $\mathbb{Z}Q$ を考える。二つの道 $\Delta_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $\Delta_2 = (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathsf{P}(Q)$ に対し、

$$\Delta_1\Delta_2 := \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m) & \text{if } r(\alpha_k) = s(\beta_1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義し線形に $\mathbb{Z}Q$ 上の積を考えると、$|Q_0|$ が有限であれば、$\mathbb{Z}Q$ は $\sum_{a \in Q_0} e_a$ を単位元とする $\mathbb{Z}$-代数となる。これを Q のパス代数と呼ぶ。

2 アップダウンクイバー

$Q = (Q_0, Q_1, s, r)$ をクイバーとする。${}^tQ_1 = \{{}^tx | x \in Q_1\}$ を形式的に考える。当然 ${}^tQ_1 \cap Q_1 = \emptyset$ と考える。

$$\begin{aligned} &Q_0^{\mathrm{ud}} = Q_0 \\ &Q_1^{\mathrm{ud}} = Q_1 \cup {}^tQ_1 \\ &s^{\mathrm{ud}} : Q_0^{\mathrm{ud}} \to Q_1^{\mathrm{ud}};\quad s^{\mathrm{ud}}(x) := s(x),\ s^{\mathrm{ud}}({}^tx) := r(x)\ (x \in Q_1) \\ &r^{\mathrm{ud}} : Q_0^{\mathrm{ud}} \to Q_1^{\mathrm{ud}};\quad r^{\mathrm{ud}}(x) := r(x),\ r^{\mathrm{ud}}({}^tx) := s(x)\ (x \in Q_1) \end{aligned}$$

上記のように定めると $Q^{\mathrm{ud}} = (Q_0^{\mathrm{ud}}, Q_1^{\mathrm{ud}}, s^{\mathrm{ud}}, r^{\mathrm{ud}})$ というクイバー Q^{ud} を得ることが出来る。これをクイバー Q のアップダウンクイバーと呼ぶ。

この小文では Q を部分群束を考え $\mathbb{Z}Q^{\mathrm{ud}}$ の重要な表現について考察することである。

3 クイバーのパス代数の表現・アップダウン代数

$Q = (Q_0, Q_1, s, r)$ をクイバーとする。w を Q_1 から可換環 R への写像とする。ここでは主に $R = \mathbb{Z}$ の場合について考える。Q の道 $\Delta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ にたいし、

$$w(\Delta) = w(\alpha_1)w(\alpha_2)\cdots w(\alpha_k)$$

また $w(e_a) = 1\ (a \in Q_0)$ とおくことにより $w : \mathsf{P}(Q) \to R$ への写像が定まる。この写像を用いて RQ の標準的な有限次表現を構成することが出来る。Q_0 を基とする自由加群 RQ_0 を考える。RQ の RQ_0 上の作用を

$$a\Delta = \begin{cases} w(\Delta)r(\Delta) & (a = s(\Delta)\ \text{の場合}) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

で定めることが出来る。このようにしてできる RQ-加群 RQ_0 及びこの加群によって定まる RQ から $\mathrm{End}(RQ_0)$ への準同形写像の像 X が非常に重要であると我々は

考えている。特にクイバー $Q = (Q_0, Q_1, s, r)$ と Q_1 から可換環 R への写像 w に対し、Q^{ud} を考え、$w({}^t\alpha) = w(\alpha)$ $(\alpha \in Q_1)$ とおくことによって得られる "X" を $\mathsf{UD}(Q, w, R)$ 又は単に $\mathsf{UD}(Q)$ と書き表し, Q のアップダウン代数と呼びこれらを用いた群の研究を考えている。

具体例を挙げる前にアップダウン代数を考える上で重要な量を定義しておく。記号は上のもとの同じとする。$a, b \in Q_0$ に対し、$\mathrm{End}(RQ_0)$ の要素 $e_{a,b}$ を次により線形に定義する：

$$xe_{a,b} = \begin{cases} b & (x = a \text{の場合}) \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

この要素 $\{e_{a,b}\}_{a,b \in Q_0}$ を用いると

$$\mathsf{UD}(Q) = \sum_{a,b \in Q_0} s_{a,b} e_{a,b}$$

なる $s_{a,b} \in R$ が定まる。この $\{s_{a,b}\}$ を $\mathsf{UD}(Q)$ の構造定数と呼ぶ。明らかに $\mathsf{UD}(Q)$ の外見を知りたければこの構造定数を調べればよいということになる。

4　例：部分群束の場合

G を有限群、$\mathrm{Sgp}(G)$ を G の部分群全体とする。$Q_0 = \mathrm{Sgp}(G)$ $H, K \in \mathrm{Sgp}(G)$ に対し、

$$H \to K \iff K \subset H$$

で矢を定めるとクイバー Q_G が得られる。$w_G(H \to K) = (H : K)$ と定める、$R = \mathbb{Z}$ とすればアップダウン代数 $\mathsf{UD}(Q_G, w_G, \mathbb{Z})$ が得られる。この小文において UD_G でこの代数を表すことにする。このとき構造定数 $s_{H,K}$ は、H から K を結ぶすべての道 Δ を考え $w_G(\Delta)$ 達の最大公約数に一致することが直ちにわかる。またこのことにより構造定数は群の位数の約数であることもわかる。この代数 UD_G が群の構造の情報をきちんと保っているこのと一例として次がある。

定理　上の記号のもとに、次は同値である。

(1)　$s_{H,K} = |G|$

(2)　$G = HK$ かつ $H \cap K = 1$

よく知られている群論の結果と結びつけると次のような結果を得る。

系　H, K がベキ零でかつ $s_{H,K} = |G|$ であるならば G は可解群である。

5 例：群指標の場合

G を有限群、H をその部分群とする。$\mathrm{Irr}(H)$ で H の通常既約指標全体の集合を表すものとし、

$$X = \bigcup_{H \in \mathrm{Sgp}(G)} \mathrm{Irr}(H)$$

とする。(以下、$\mathbb{Z}[\mathrm{Irr}(H)]$ に属する指標を表すとき χ_H のように所属する部分群を下付きで表すものとする。)

$\chi_H, \theta_K \in X$ に対し、

$$\chi_H \to \theta_K \iff H > K \text{ かつ } (\chi_H|_K, \theta_K)_K \neq 0$$

によって矢を定義するとクイバー $Q_{\mathrm{ch}}(G) = (Q_0, Q_1, s, r)$ (但し $Q_0 = X$) が定まる。また、$w(\chi_H \to \theta_K) = (\chi_H|_K, \theta_K)_K$ と定めることにより $\mathrm{UD}(Q_{\mathrm{ch}}(G), w, \mathbb{Z})$ が得られる。このアップダウン代数をここでは簡単に $\mathrm{UD}_c(G)$ で表すことにする。この代数は、「自然な形で」いろいろな重要な代数（バーンサイド環等）及びアップダウン代数（例えば UD_G 等）を含む懐の大きな代数である。そこでこの外形を知ることは大きな意味があると考えられ、$\mathrm{UD}_c(G)$ の構造定数を求めることが重要な課題と考えられる。

当初この代数の構造定数は、複雑なものになると考えていたが、次の結果が示された。

定理 $\mathrm{UD}_c(G)$ の構造定数はすべて 1 である。

証明のポイントは、ブラウワーの既約指標の特徴づけ定理を用いて G を基本 p-群の場合に帰着することである。問題を考えていた当初、我々は $\mathrm{UD}_c(G)$ の構造定数は当然 1 以外の値もとるものと考えており、ベキ零群でさえそのようになると思っていた。我々にとっては実に驚きの結果であった。

6 終わりに

今回部分束等を調べる上で重要と思われるクイバーとそのアップダウン代数について説明をした。これらは、部分群束、コセット幾何等の研究に重要な役割を果たすであろうと思われる。これらについては、別の機会に紹介したいと思う。

文献

[1] N.Iiyori and M.Swabe, Representations of path algebras with applications to subgroup lattices and group characters, preprint.

文責：飯寄信保